ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**HÀ THỊ NGỌC BÍCH**

# VỀ SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

Chuyên ngành: **Toán ứng dụng**
Mã số: **8460112**

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**CÁN BỘ HƯỚNG DẪN KHOA HỌC**
**TS. Nguyễn Song Hà**

THÁI NGUYÊN - 2020

# LỜI CẢM ƠN

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Nguyễn Song Hà. Tôi xin bày tỏ lòng kính trọng và sự biết ơn sâu sắc tới người thầy đã dành nhiều thời gian trực tiếp hướng dẫn cũng như giải đáp những thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm và hoàn thiện luận văn. Qua đây, tôi cũng xin được gửi lời cảm ơn tới các thầy cô giáo tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi hoàn thành khóa học. Cuối cùng, xin gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu, tập thể giáo viên trường THPT Nam Phù Cừ, nơi tôi đang công tác đã động viên và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong thời gian tôi học tập và làm luận văn tốt nghiệp.

**Tác giả**

**Hà Thị Ngọc Bích**

# Mục lục

# Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}^n$ | Không gian thực hữu hạn chiều |
| $co(C)$ | Bao lồi của tập $C$ |
| $cl(C)$ | Bao đóng của tập $C$ |
| $C\backslash D$ | Phần bù của tập hợp $D$ trong $C$ |
| $\langle x, y\rangle$ | Tích vô hướng của hai véctơ $x$ và $y$ |
| $\\|x\\|$ | Chuẩn của véctơ $x$ |
| $\forall x$ | Với mọi $x$ |
| $F : X \to Y$ | Ánh xạ đơn trị từ $X$ vào $Y$ |
| $F : X \rightrightarrows Y$ | Ánh xạ đa trị từ $X$ vào $Y$ |
| $P_C(x)$ | Phép chiếu mêtric phần tử $x$ lên tập $C$ |
| $\alpha \downarrow 0$ | $\alpha$ giảm dần về 0 |
| $\nabla f(x)$ | Gradient của ánh xạ $f$ tại $x$ |
| $\partial f(x)$ | Dưới vi phân của ánh xạ $f$ tại $x$ |
| $x_n \to x$ | Dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $x$ khi $n \to +\infty$ |
| (VIP) | Bài toán bất đẳng thức biến phân |
| (MVIP) | Bài toán bất đẳng thức biến phân Minty |
| Fix$(T)$ | Tập điểm bất động của ánh xạ $T$ |
| KKM | Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz |

# Danh sách bảng

# Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân được hình thành từ những công trình nghiên cứu của Lion, Stampacchia và Minty [1, 6] vào những năm 50 của thế kỉ trước. Bài toán này có liên hệ mật thiết với nhiều bài toán lí thuyết như: bài toán tối ưu, bài toán cân bằng, bài toán điểm bất động, bài toán minimax, bài toán điểm yên ngựa, phương trình với toán tử đơn điệu, bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng ... và đóng vai trò rất quan trọng trong nghiên cứu nhiều lĩnh vực thực tiễn như: công nghệ thông tin và truyền thông, giao thông, kinh tế, y học, quân sự ... Vì lẽ đó, trong suốt hơn 70 mươi năm qua, bài toán này đã và đang thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước.

Những nghiên cứu về bài toán này chủ yếu theo ba hướng chính: Một là, nghiên cứu các tính chất định tính của bài toán về sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, tính ổn định nghiệm, độ nhạy nghiệm hay tính chất tôpô của tập nghiệm. Hai là, nghiên cứu đề xuất các thuật toán hoặc phương pháp giải số hữu hiệu tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán. Ba là, nghiên cứu ứng dụng lí thuyết bài toán này vào giải quyết các mô hình thực tiễn.

Mục đích chính của luận văn này là nghiên cứu và trình bày lại có hệ thống về sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian hữu hạn chiều cùng một số phương pháp xấp xỉ nghiệm.

Với mục tiêu như vậy, ngoài phần mở đầu, luận văn gồm có hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo. Chương 1, hệ thống lại một số kiến thức cơ bản của giải tích lồi và giải tích hàm nhằm phục vụ cho việc trình bày các nội dung chính ở phần sau của luận văn. Chương 2, dành để giới thiệu lớp bài toán nghiên cứu cùng các kết quả tồn tại nghiệm được xây dựng trên tính chất loại đơn điệu của ánh xạ mục tiêu và cấu trúc tôpô của miền ràng buộc. Phần cuối chương, chúng tôi trình bày ba phương pháp chiếu (phương pháp chiếu gradient, phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu tăng cường) tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán cùng các ví dụ số minh họa cụ thể.

# Chương 1

# Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi hệ thống lại một số kiến thức cơ bản phục vụ cho việc trình bày các nội dung chính ở phần sau của luận văn. Cấu trúc của chương được chia thành ba phần: Mục 1.1 chúng tôi trình bày một số nội dung cơ bản về lý thuyết điểm bất động và phép chiếu mêtric trên tập con lồi khác rỗng trong không gian hữu hạn chiều. Mục 1.2 trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản về dưới vi phân hàm lồi. Các khái niệm về ánh xạ loại đơn điệu và liên tục được cụ thể hóa trong Mục 1.3. Phần cuối chương, Mục 1.4 dùng để giới thiệu về lớp ánh xạ đa trị KKM và nguyên lí ánh xạ KKM. Đây là công cụ chính để chứng minh các kết quả tồn tại nghiệm trong Chương 2.

## 1.1. Một số vấn đề về điểm bất động và phép chiếu mêtric

Giả sử $\mathbb{R}^n$ là không gian Euclide $n$ chiều, tích vô hướng và chuẩn trên không gian này được kí hiệu lần lượt là $\langle .,. \rangle$ và $\|.\|$. Tích vô hướng của hai véctơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ và $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ xác định bởi $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$ và chuẩn của véctơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tương ứng sinh bởi tích vô hướng này là $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$.

**Định nghĩa 1.1.** Tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là tập lồi nếu với mọi $x, y \in C$ và với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in C.$$

Hay nói cách khác, tập $C \subseteq \mathbb{R}^n$ là tập lồi nếu nó chứa mọi đoạn thẳng nối hai điểm bất kì thuộc nó.

**Ví dụ 1.1.** Trong không gian $\mathbb{R}^n$, các tập hợp

$$S = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\},$$

$$H_\alpha = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \le \alpha\},$$

$$\Delta = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \langle A, x \rangle \leq b\},$$

trong đó $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r$ là số thực dương, $a \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $A$ là ma trận thực cỡ $m \times n$ và $b \in \mathbb{R}^m$, tương ứng là hình cầu tâm $x_0$ với bán kính $r$, nửa không gian đóng, hình đa diện. Các tập hợp này là các tập lồi.

**Ví dụ 1.2.** Một số ví dụ đơn giản về tập hợp không là tập lồi trong không gian $\mathbb{R}^2$ và $\mathbb{R}^3$ là

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 > 1\},$$

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 > 1\},$$

$$C_3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = x_1^2 + x_2^2\},$$

$$C_4 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1\}.$$

Một số tính chất cơ bản về tập lồi được phát biểu trong mệnh đề sau.

**Mệnh đề 1.1.** *Trong không gian $\mathbb{R}^n$, ta có các khẳng định sau:*

*(i) Giao của một họ tùy ý các tập lồi là tập lồi.*

*(ii) Nếu $C$ là tập lồi thì $\alpha C$ cũng là tập lồi với mọi số thực $\alpha$.*

*(iii) Tổng của hai tập lồi là tập lồi.*

*(iv) Tích Descartes của hai tập lồi là tập lồi.*

*(v) Ảnh và nghịch ảnh của một tập lồi qua một phép biến đổi tuyến tính là tập lồi.*

*Chứng minh.* (i) Giả sử $\{C_i\}, i \in I$ là một họ tùy ý các tập lồi, ở đây $I$ là tập chỉ số nào đó. Khi đó, với mọi $x, y \in \bigcap_{i \in I} C_i$ và với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có:

$$x, y \in C_i, \quad \forall i \in I.$$

Vì $C_i$ là tập lồi nên

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in C_i, \quad \forall i \in I.$$

Từ đây suy ra

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in \bigcap_{i \in I} C_i.$$

Hay nói cách khác, $\bigcap_{i\in I} C_i$ là tập lồi.

(ii) Lấy tùy ý hai phần tử $x, y \in \alpha C$ và $\lambda \in [0,1]$. Khi đó, $x$ và $y$ tương ứng có dạng $x = \alpha u$ và $y = \lambda v$ với $u, v \in C$. Do $C$ lồi nên $\lambda u + (1-\lambda)v \in C$. Điều này dẫn đến

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda(\alpha u) + (1-\lambda)(\alpha v) = \alpha[\lambda u + (1-\lambda)v] \in \alpha C.$$

Do đó, $\alpha C$ là tập lồi.

(iii) Giả sử $C$ và $D$ là hai tập lồi. Lấy tùy ý hai phần tử $x, y \in C + D$ và $\lambda \in [0,1]$. Khi đó, $x$ và $y$ lần lượt có dạng $x = u + v$ và $y = w + z$, trong đó $u, w \in C$ và $v, z \in D$. Do $C, D$ lồi nên $\lambda u + (1-\lambda)w \in C$ và $\lambda v + (1-\lambda)z \in D$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= \lambda(u+v) + (1-\lambda)(w+z)\\ &= [\lambda u + (1-\lambda)w] + [\lambda v + (1-\lambda)z] \in C + D.\end{aligned}$$

Vì vậy, $C + D$ là tập lồi.

(iv) Giả sử $H$ và $K$ là hai tập lồi. Lấy tùy ý hai phần tử $x = (u, v) \in H \times K, y = (w, z) \in H \times K$ và $\lambda \in [0,1]$. Từ tính lồi của $H, K$ suy ra $\lambda u + (1-\lambda)w \in H$ và $\lambda v + (1-\lambda)z \in K$. Mặt khác, để ý rằng

$$\begin{aligned}\lambda x + (1-\lambda)y &= (\lambda u, \lambda v) + ((1-\lambda)w, (1-\lambda)z)\\ &= (\lambda u + (1-\lambda)w, \lambda v + (1-\lambda)z) \in H \times K.\end{aligned}$$

Vì thế, ta có $H \times K$ là tập lồi.

(v) Giả sử $f$ là một toán tử tuyến tính, $C$ và $D$ là các tập lồi. Khi đó, $\forall x, y \in f(C), \forall \lambda \in [0,1]$ ta có

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) = f(\lambda u + (1-\lambda)v),$$

ở đây, $u, v \in C$ và $x = f(u), y = f(v) \in f(C)$. Vì $C$ lồi nên $\lambda u + (1-\lambda)v \in C$ và vì thế suy ra $\lambda x + (1-\lambda)y \in f(C)$. Hay nói cách khác ảnh của $C$ qua phép biến đổi $f$ là tập lồi.

Bây giờ, nếu $x, y \in f^{-1}(D)$ thì $f(x) \in D$ và $f(y) \in D$. Vì $D$ lồi nên

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \in D.$$

Điều này dẫn đến

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in f^{-1}(D).$$

Do đó, $f^{-1}(D)$ là tập lồi. $\square$

**Định nghĩa 1.2.** Véctơ $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là tổ hợp lồi của các véctơ $x_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ nếu tồn tại $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ với $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ sao cho

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i.$$

**Mệnh đề 1.2.** *Cho $C \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi và $x_1, x_2, \cdots, x_m \in C$. Khi đó, $C$ chứa tất cả các tổ hợp lồi của $x_1, x_2, \cdots, x_m$.*

*Chứng minh.* Ta chứng minh quy nạp theo $m$.

Trường hợp $m = 2$, ta có

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C,$$

vì $C$ là tập lồi. Do đó, kết luận của mệnh đề là đúng trong trường hợp này.

Giả sử khẳng định của mệnh đề đúng với $m = k \geq 2$. Ta cần chứng minh

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i \in C.$$

với $\lambda_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, k+1$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$.

Thật vậy, nếu $\lambda_{k+1} = 1$ thì $\lambda_i = 0$ với mọi $1 \leq i \leq k$. Do đó, ta nhận được

$$x = \lambda_{k+1} x_{k+1} = x_{k+1} \in C.$$

Bây giờ, giả sử $\lambda_{k+1} < 1$. Khi đó, ta thấy

$$1 - \lambda_{k+1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k > 0, \quad \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \cdots, k$$

và

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}} = 1.$$